JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY 16, 289–298 (1976)

Über die Norm des Operators der Kardinalen Spline-Interpolation

GÜNTER MEINARDUS

Institut für Angewandte Mathematik I, Universität Erlangen — Nürnberg, 852 Erlangen, West Germany

Received August 14, 1973

Es seien k und N ganze Zahlen, $k \geqslant 0$, $N \geqslant 1$. Wir legen den Raum C_N der auf der reellen Achse stetigen und periodischen Funktionen der Periode N zugrunde. Ferner sei $\mathfrak{S}_N^{2k+1}$ der Raum der periodischen Splinefunktionen der Periode N vom Grad $2k+1$ zu den ganzen Zahlen als Knoten. Es ist bekannt [1], daß es zu jedem $f \in C_N$ genau ein $s \in \mathfrak{S}_N^{2k+1}$ gibt, so daß

$$s(\nu) = f(\nu), \tag{1}$$

für alle ν gilt. Der zugehörige lineare Operator, der vermöge (1) den Raum C_N in den Raum $\mathfrak{S}_N^{2k+1}$ abbildet, sei mit

$$\mathfrak{L}_N^{2k+1} = \mathfrak{L}_N^{2k+1}(f), \tag{2}$$

bezeichnet. Die der Supremumnorm in C_N zugeordnete Operatornorm nennen wir

$$\| \mathfrak{L}_N^{2k+1} \| .$$

In [3] wurden Darstellungen dieser Normen durch Kurvenintegrale im Komplexen gewonnen. Insbesondere wurde gezeigt, daß

$$\lim_{N\to\infty} \| \mathfrak{L}_N^{2k+1} \| = \| \mathfrak{L}^{2k+1} \| , \tag{3}$$

eine obere Schranke für alle $\| \mathfrak{L}_N^{2k+1} \|$ ist. Diese Zahl ist gleichzeitig die Norm des Operators der kardinalen Spline-Interpolation [4, 5] vom Grad $2k+1$.

Es ist das Ziel der vorliegenden Arbeit, obere und untere Schranken für $\| \mathfrak{L}^{2k+1} \|$ herzuleiten sowie das asymptotische Verhalten für $k \to \infty$ zu untersuchen. Es zeigt sich (vgl. Satz 1 und Tabelle 1), daß Einschließungen für diese Normen mit geringem Rechenaufwand bei hoher Genauigkeit gewonnen werden können. Das asymptotische Verhalten für $k \to \infty$, wonach $\| \mathfrak{L}^{2k+1} \|$ mit dem Logarithmus von k wächst (vgl. Satz 2), ist in sich schon interessant. Auch hier ist die numerische Genauigkeit selbst für kleine Werte von k (vgl. Tabelle 1) recht gut.

Es sei bemerkt, daß ähnliche Aussagen für die kardinale Spline-Interpolation bei geradem Grad und auch für verschiedene andere Modifikationen dieser Interpolationsprozesse gewonnen werden können.

1. Die Integraldarstellung von $\| \mathfrak{L}^{2k+1} \|$

Die folgenden Aussagen bis zur Formel (5) findet man in [3] ausführlich dargestellt. Es sei $H_{2k+1}(\tau, z)$ ein Polynom in τ und z, das für $| z | < 1$ durch

$$H_{2k+1}(\tau, z) = (1 - z)^{2k+2} \sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu (\tau + \nu)^{2k+1} \tag{4}$$

definiert ist. Das Polynom $H_{2k+1}(1, z)$ ist vom Grad $2k$ und auf $| z | = 1$ von Null verschieden. Das Polynom $H_{2k+1}(\frac{1}{2}, z)$ ist vom Grad $2k + 1$ und verschwindet bei $z = -1$.

Für die Norm $\| \mathfrak{L}_N^{2k+1} \|$ gilt die Integraldarstellung

$$\| \mathfrak{L}^{2k+1} \| = \frac{1}{\pi i} \int_{|z|=1} \frac{H_{2k+1}(1/2, z)\, dz}{z(1 + z)\, H_{2k+1}(1, z)}, \tag{5}$$

wobei der Einheitskreis im positiven Sinn durchlaufen wird. Unter Verwendung des Residuensatzes berechnet man

$$\| \mathfrak{L}^1 \| = 1,$$

$$\| \mathfrak{L}^3 \| = (1 + 3\sqrt{3})/4 = 1{,}549.038\ldots \qquad \text{(vgl. [2])},$$

$$\| \mathfrak{L}^5 \| = 1{,}8161186\ldots \qquad \text{(vgl. [6, 7])}.$$

Für größere Werte von k ist diese Art der Berechnung aufwendig und unübersichtlich. Wir formen zur weiteren Behandlung das in (5) gegebene Integral um.

Lemma 1. *Es gilt die Integraldarstellung*

$$\| \mathfrak{L}^{2k+1} \| = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{(1/\cos t)^{(2k+1)}}{(tg\, t)^{(2k+1)}} \frac{dt}{\sin t}. \tag{6}$$

Hier bedeuten die hochgestellten eingeklammerten Indizes Ableitungen der Ordnung $2k + 1$.

Beweis. Mit,

$$z = e^{-\zeta}, \qquad R\zeta > 0,$$

folgt aus (4) unmittelbar

$$H_{2k+1}(\tau, e^{-\zeta}) = -(1-e^{-\zeta})^{2k+2}\, e^{\tau\zeta} \frac{\partial^{2k+1}}{\partial\zeta^{2k+1}} \left(\frac{e^{-\tau\zeta}}{1-e^{-\zeta}}\right).$$

Diese Formel gilt somit wieder für alle Werte von ζ. Für

$$\zeta = -2it + \pi i,$$

ergibt sich

$$H_{2k+1}(\tfrac{1}{2}, -e^{2it}) = \frac{(-1)^k}{2^{2k+2}i} (1 + e^{2it})^{2k+2}\, e^{-it} \frac{d^{2k+1}}{dt^{2k+1}} \left(\frac{1}{\text{cas } t}\right) \tag{7}$$

und

$$H_{2k+1}(1, -e^{2it}) = \frac{(-1)^k}{2^{2k+2}} (1 + e^{2it})^{2k+2}\, e^{-2it} \frac{d^{2k+1}}{dt^{2k+1}} (tgt). \tag{8}$$

Nunmehr führe man in (5) die Parameterdarstellung

$$z = -e^{2it}, \qquad \frac{-\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{+\pi}{2},$$

ein. Es folgt

$$\| \mathfrak{L}^{2k+1} \| = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{H_{2k+1}(1/2, -e^{2it})\, dt}{(1-e^{2it})\, H_{2k+1}(1, -e^{2it})}.$$

Unter Verwendung von (7) und (8) und weil der Integrand eine gerade Funktion von t ist, erhält man die Behauptung (6).

2. Ein Einschließungssatz

Wir benötigen drei Lemmata.

Lemma 2. *Ist t kein ungerades Vielfaches von $\pi/2$, so gilt*

$$\left(\frac{1}{\cos t}\right)^{2k+1} = (2k+1)! \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \left\{\frac{1}{(t-(r+1/2)\pi)^{2k+2}} - \frac{1}{(t+(r+1/2)\pi)^{2k+2}}\right\} \tag{9}$$

und

$$(tg\ t)^{2k+1}$$
$$= (2k+1)! \sum_{r=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(t-(r+1/2)\pi)^{2k+2}} + \frac{1}{(t+(r+1/2)\pi)^{2k+2}} \right\} \quad (10)$$

Beweis. Die Formeln (9) und (10) folgen unmittelbar aus den bekannten Partialbruchreihen der Funktionen

$$1/\cos t \qquad \text{und} \qquad \mathrm{tg}\, t.$$

Lemma 3. *Die für* $t \in [0, \pi/2]$ *stetige Funktion*

$$R_1(t) = \left(t - \frac{\pi}{2}\right)^{2k+2} \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r$$
$$\times \left\{ \frac{1}{(t-(r+1/2)\pi)^{2k+2}} - \frac{1}{(t+(r+1/2)\pi)^{2k+2}} \right\} \quad (11)$$

genügt dort den Ungleichungen

$$o \leqslant R_1(t) \leqslant \frac{8}{27\pi} \cdot \frac{(k+1)}{3^{2k}} \cdot t. \quad (12)$$

Beweis. Für $t \in [0, \pi/2]$ gilt

$$\frac{1}{(t-(r+1/2)\pi)^{2k+2}} \geqslant \frac{1}{(t+(r+1/2)\pi)^{2k+2}}.$$

Die in (11) auftretende Reihe ist deshalb alternierend. Die Absolutbeträge der Reihenglieder bilden eine monotone Nullfolge, denn mit

$$\varphi(t) = \left\{ \frac{1}{(t-(r+\frac{1}{2})\pi)^{2k+2}} - \frac{1}{(t+(r+\frac{1}{2})\pi)^{2k+2}} \right\}$$
$$- \left\{ \frac{1}{(t-(r+\frac{3}{2})\pi)^{2k+2}} - \frac{1}{(t+(r+\frac{3}{2})\pi)^{2k+2}} \right\},$$

gilt

$$\varphi'(t) > 0 \qquad \text{für} \quad t \in (0, \pi/2]$$

und

$$\varphi(0) = 0,$$

somit

$$\varphi(t) > 0 \qquad \text{für} \quad t \in (0, \pi/2].$$

Es folgt

$$o \leqslant R_1(t) \leqslant \left(t - \frac{\pi}{2}\right)^{2k+2} \left\{\frac{1}{(t - 3\pi/2)^{2k+2}} - \frac{1}{(t + 3\pi/2)^{2k+2}}\right\}$$

$$= \left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2 \left\{\frac{1}{(t - 3\pi/2)^2} - \frac{1}{(t + 3\pi/2)^2}\right\}$$

$$\cdot \sum_{\nu=0}^{k} \frac{(t - \pi/2)^{2k}}{(t - 3\pi/2)^{2\nu} (t + 3\pi/2)^{2k-2\nu}} \Bigg\} .$$

Wegen

$$\frac{(t - \pi/2)^{2k}}{(t - \frac{3}{2}\pi)^{2\nu} (t + \frac{3}{2}\pi)^{2k-2\nu}} \leqslant \frac{1}{3^{2k}}$$

und

$$\frac{1}{(t - \frac{3}{2}\pi)^2} - \frac{1}{(t + \frac{3}{2}\pi)^2} \leqslant \frac{32}{27\pi^3}\, t,$$

ergibt sich

$$o \leqslant R_1(t) \leqslant \frac{32}{27\pi^3} \cdot \frac{(k+1)}{3^{2k}} \left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2 t \leqslant \frac{8}{27\pi} \cdot \frac{(k+1)}{3^{2k}}\, t.$$

LEMMA 4. *Die für $t \in [0, \pi/2]$ stetige Funktion*

$$R_2(t) = \left(t - \frac{\pi}{2}\right)^{2k+2} \cdot \sum_{r=1}^{\infty} \left\{\frac{1}{(t - (r + \frac{1}{2})\,\pi)^{2k+2}} + \frac{1}{(t + (r + \frac{1}{2})\,\pi)^{2k+2}}\right\} \tag{13}$$

genügt dort den Ungleichungen

$$o \leqslant R_2(t) \leqslant \frac{\pi^2/4 - 2}{3^{2k}} . \tag{14}$$

Beweis. Für $t \in [0, \pi/2]$ ist

$$o \leqslant \frac{\pi/2 - t}{(r + \frac{1}{2})\,\pi - t} \leqslant \frac{1}{2r + 1}$$

und

$$o \leqslant \frac{\pi/2 - t}{(r + \frac{1}{2})\,\pi + t} \leqslant \frac{1}{2r + 1} .$$

Somit folgt

$$o \leqslant R_2(t) \leqslant 2 \cdot \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{(2r + 1)^{2k+2}}$$

$$\leqslant \frac{2}{3^{2k+2}} \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2r + 1}\right)^2 = \frac{2}{3^{2k}} (\pi^2/8 - 1).$$

Wir kommen nun zum Einschließungssatz.

SATZ 1. *Mit*

$$\mathfrak{J}_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\pi/2} \frac{1 - \left(\frac{t-\pi/2}{t+\pi/2}\right)^{2k+2}}{1 + \left(\frac{t-\pi/2}{t+\pi/2}\right)^{2k+2}} \frac{dt}{\sin t} \tag{15}$$

besteht für $\| \mathfrak{L}^{2k+1} \|$ *die Einschließung*

$$\mathfrak{J}_k \cdot \left(1 - \frac{c_1}{3^{2k}}\right) - c_2 \frac{(k+1)}{3^{2k}} \leqslant \| \mathfrak{L}^{2k+1} \| \leqslant \mathfrak{J}_k \,. \tag{16}$$

Hier ist

$$c_1 = \pi^2/4 - 2 \approx 0{,}467401...,$$

und

$$c_2 = \frac{32G}{27\pi^2} \approx 0{,}109993....,$$

wobei

$$G = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{tdt}{\sin t} \approx 0{,}915965...$$

die sog. Catalansche Konstante bedeutet.

Beweis. Nach (6) gilt mit den Bezeichnungen der Lemmata 2, 3 und 4, daß

$$\| \mathfrak{L}^{2k+1} \| = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \left(\frac{t-\pi/2}{t+\pi/2}\right)^{2k+2} - R_1(t)}{1 + \left(\frac{t-\pi/2}{t+\pi/2}\right)^{2k+2} + R_2(t)} \frac{dt}{\sin t} \,,$$

ist. Aus (12) und (14) folgt sofort

$$\| \mathfrak{L}^{2k+1} \| \leqslant \mathfrak{J}_k \,.$$

Zur Herleitung der unteren Schranke verfahre man folgendermaßen: Es ist

$$\| \mathfrak{L}^{2k+1} \| = \mathfrak{J}_k - \mathfrak{H}_k \,,$$

mit

$$\mathfrak{H}_k \leqslant \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} R_2(t) \frac{1 - \left(\frac{t-\pi/2}{t+\pi/2}\right)^{2k+2}}{1 + \left(\frac{t-\pi/2}{t+\pi/2}\right)^{2k+2}} \frac{dt}{\sin t} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{R_1(t)}{\sin t} \, dt.$$

Unter Verwendung von (12) und (14) erhält man

$$\mathfrak{H}_k \leqslant \frac{\pi^2/4 - 2}{3^{2k}} \mathfrak{I}_k + \frac{32G}{27\pi^2} \cdot \frac{(k+1)}{3^{2k}},$$

mit

$$G = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{tdt}{\sin t}.$$

Hieraus folgt die Behauptung.

Die numerische Berechnung des Integrals $\mathfrak{I}_k$ macht auch für große Werte von k keine Schwierigkeiten. Tabelle 1 zeigt in der zweiten und dritten Spalte die durch (16) gegebenen unteren und oberen Schranken für $\| \mathfrak{L}^{2k+1} \|$ für $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

TABLE 1

Approximationen für $\| \mathscr{L}^{2k+1} \|$

k	untere Schranke nach (16)	obere Schranke $\mathfrak{I}_k$	asymptotischer Wert $c_3 \log(k+1) + c_4$
0	0,494088	1,134215	1,116308
1	1,456353	1,561912	1,557579
2	1,803037	1,817600	1,815706
3	1,998021	1,999907	1,998850
4	2,141344	2,141582	2,140908
5	2,257414	2,257444	2,256977
6	2,355451	2,355455	2,355112

3. Asymptotisches Verhalten für $k \to \infty$.

Wir werden nunmehr für $\| \mathfrak{L}^{2k+1} \|$ eine asymptotische Beziehung herleiten.

SATZ 2. *Für $k \to \infty$ gilt*

$$\| \mathfrak{L}^{2k+1} \| = c_3 \log(k+1) + c_4 + O(1/(k+1)). \tag{17}$$

Hier ist

$$c_3 = 2/\pi \approx 0,636620$$

und

$$c_4 = (2/\pi)(\gamma + \log(32/\pi^2)) \approx 1,116308,$$

wobei γ die Eulersche Konstante bedeutet.

Bemerkung. Auf Aussagen über die im O-Glied enthaltene Konstante soll hier verzichtet werden, obgleich es möglich ist, hierfür eine gute Abschätzung zu geben.

Beweis von Satz 2. Es genügt nach (16) zu beweisen, daß

$$\mathfrak{J}_k = c_3 \log(k+1) + c_4 + O(1/(k+1)),$$

ist. Mit der Transformation

$$z = \frac{\pi/2 - t}{\pi/2 + t},$$

wird

$$\mathfrak{J}_k = 2 \int_0^1 \frac{1 - z^{2k+2}}{(1 + z^{2k+2})(1+z)^2} \frac{dz}{\sin((\pi/2)(1-z)/(1+z))},$$

also

$$\mathfrak{J}_k = \mathfrak{J}_{k1} + \mathfrak{J}_{k2} + \mathfrak{J}_{k3} + \mathfrak{J}_{k4}, \tag{18}$$

mit

$$\mathfrak{J}_{k1} = \frac{4}{\pi} \int_0^1 \frac{1 - z^{2k+2}}{1 - z^2} dz,$$

$$\mathfrak{J}_{k2} = -\frac{4}{\pi} \int_0^1 \frac{z^{2k+2}(1 - z^{2k+2})}{(1 + z^{2k+2})(1 - z^2)} dz,$$

$$\mathfrak{J}_{k3} = 2 \int_0^1 \left\{ \frac{1}{\sin((\pi/2)(1-z)/(1+z))} - \frac{1}{(\pi/2)(1-z)/(1+z)} \right\} \times \frac{dz}{(1+z)^2},$$

und

$$\mathfrak{J}_{k4} = -4 \int_0^1 \left\{ \frac{1}{\sin((\pi/2)(1-z)/(1+z))} - \frac{1}{(\pi/2)(1-z)/(1+z)} \right\} \times \frac{z^{2k+2}}{(1 + z^{2k+2})(1+z)^2} dz.$$

Wir verwenden zur Auswertung von $\mathfrak{J}_{k1}$ die bekannte Formel

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu} = \log n + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right) \text{ für } n \to \infty.$$

Es ist

$$\mathfrak{I}_{k1} = \frac{4}{\pi}\left\{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2k+1}\right\} = \frac{4}{\pi}\left\{\sum_{\nu=1}^{2k+2} \frac{1}{\nu} - \frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{k+1} \frac{1}{\mu}\right\}$$

$$= \frac{4}{\pi}\left\{\log(2k+2) + \gamma - \frac{1}{2}\log(k+1) - \frac{1}{2}\gamma + O\left(\frac{1}{k+1}\right)\right\}.$$

d.h.

$$\mathfrak{I}_{k1} = \frac{2}{\pi}\log(k+1) + \frac{2}{\pi}(\gamma + \log 4) + O\left(\frac{1}{k+1}\right). \tag{19}$$

Das Integral $\mathfrak{I}_{k2}$ ist wegen

$$|\,\mathfrak{I}_{k2}\,| \leqslant \frac{4(k+1)}{\pi}\int_0^1 z^{2k+2}\,dz < \frac{2}{\pi}$$

beschränkt. Das asymptotische Verhalten ergibt sich so: Die Transformation

$$z^{2k+2} = w,$$

liefert

$$\mathfrak{I}_{k2} = -\frac{4}{\pi}\int_0^1 \left(\frac{1-w}{1+w}\right)\left\{\frac{w^{1/2k+2}}{(2k+2)(1-w^{1/k+1})}\right\}dw.$$

Für $0 < w < 1$ gilt aber

$$\frac{w^{1/2k+2}}{(2k+2)(1-w^{1/k+1})} = -\frac{1}{2\log w} + O\left(\frac{1}{(k+1)^2}\right).$$

Somit wird

$$\mathfrak{I}_{k2} = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{(1-w)\,dw}{(1+w)\log w} + O\left(\frac{1}{(k+1)^2}\right),$$

d.h.

$$\mathfrak{I}_{k2} = -2/\pi \log \pi/2 + O(1/(k+1)^2). \tag{20}$$

Das Integral $\mathfrak{I}_{k3}$ ist unabhängig von k. Sein Wert ergibt sich vermöge der Rücktransformation

$$(\pi/2)((1-z)/(1+z)) = w,$$

leicht zu

$$\mathfrak{I}_{k3} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{\sin w} - \frac{1}{w}\right)dw = \frac{2}{\pi}\log\frac{4}{\pi}. \tag{21}$$

Endlich ist

$$|\mathfrak{J}_{k4}| \leqslant 4 \max_{0 \leqslant w \leqslant \pi/2} \left(\frac{1}{\sin w} - \frac{1}{w}\right) \cdot \int_0^1 z^{2k+2}\, dz,$$

also

$$\mathfrak{J}_{k4} = O(1/(k+1)). \tag{22}$$

Die Aussagen (19), (20), (21) und (22) liefern in Verbindung mit (18) die behauptete Beziehung für $\mathfrak{J}_k$. In Tabelle 1 finden sich in der vierten Spalte die Werte von

$$\frac{2}{\pi} \log (k+1) + \frac{2}{\pi} \left(\gamma + \log \frac{32}{\pi^2}\right)$$

für $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Sie sind numerisch überraschend genau.

Note added in proof. Das in Satz 2 angegebene asymptotische Verhalten wurde, unabhängig von meinen Untersuchungen, in der Zwischenzeit ebenfalls von F. B. Richards bewiesen.

LITERATUR

1. J. H. AHLBERG, E. N. NILSON, AND J. L. WALSH, "The Theory of Splines and Their Applications", Academic Press, New York, 1967.
2. E. W. CHENEY AND F. SCHURER, A note on the operators arising in spline approximation, *J. Approximation Theory* **1** (1968), 94–102.
3. G. MEINARDUS AND G. MERZ, Zur periodischen spline-interpolation, *J. Approximation Theory*, to appear.
4. F. B. RICHARDS, Best bounds for the uniform periodic spline interpolation operator, *J. Approximation Theory* **7** (1973), 302–317.
5. I. J. SCHOENBERG, Cardinal interpolation and spline functions, *J. Approximation Theory*, **2** (1969), 167–206.
6. F. SCHURER, A Note on Interpolating Periodic Quintic Splines with Equally Spaced Nodes. *J. Approximation Theory* **1** (1968), 493–500.
7. F. SCHURER, A note on interpolating periodic quintic spline functions, *in* "Approximations Theory" (Proceedings of the Symposium, Lancaster), pp. 71–81, Academic Press London, 1970.